

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SEÁN DINEEN

RICHARD M. TIMONEY

JEAN-PIERRE VIGUÉ

**Pseudodistances invariantes sur les domaines d'un
espace localement convexe**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 12, n^o 4
(1985), p. 515-529.

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1985_4_12_4_515_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Pseudodistances invariantes sur les domaines d'un espace localement convexe.

SEÁN DINEEN - RICHARD M. TIMONEY

JEAN-PIERRE VIGUÉ (*)

Dans cet article, nous montrerons que les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi coïncident sur les domaines convexes d'un espace localement convexe. Ceci répond à une question de L. Harris [7]. Le problème analogue, en dimension finie, a été posé par S. Kobayashi [13] et résolu indépendamment par L. Lempert [15] et par H. Royden et P. Wong [16]. Dans notre démonstration, nous utiliserons le résultat de L. Lempert, H. Royden et P. Wong, le théorème de Montel et les ultrafiltres.

Nous donnerons ensuite quelques applications de ce résultat. Nous en déduirons d'abord une nouvelle démonstration de la convexité des domaines bornés cerclés homogènes d'un espace de Banach complexe E qui admettent une réalisation comme un domaine de Siegel (voir aussi W. Kaup [11]). Nous montrerons ensuite que, pour un domaine borné convexe d'un espace de Banach réflexif, l'égalité des distances de Carathéodory et de Kobayashi entraîne l'existence de géodésiques complexes sur D au sens de E. Vesentini [17, 18 et 19]. À l'aide de ce résultat, nous étudierons le problème suivant: soient D_1 et D_2 deux domaines bornés convexes d'un espace de Banach réflexif. Soit a un point de D_1 , et soit $f: D_1 \rightarrow D_2$ une application holomorphe telle que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Carathéodory $\gamma_{D_1}(a_1, \cdot)$. En supposant de plus que, pour tout point z de D_2 , il existe une unique géodésique complexe passant par $b = f(a)$ et z , nous montrerons que f est une application bijective de D_1 sur D_2 . [Malheureusement, nous ne savons pas si f est un isomorphisme biholomorphe].

(*) J.-P. VIGUÉ tient à remercier le C.N.R.S. (France)/N.B.S.T. (Irlande) pour l'accord qui lui a permis de visiter Dublin en Mai 1983. Une partie de ce travail a été faite pendant son séjour.

Pervenuto alla Redazione il 10 Ottobre 1984.

La théorie des pseudodistances invariantes a été faite par S. Kobayashi [12, 13] en dimension finie et par L. Harris [7], T. Franzoni et E. Vesentini [6] en dimension infinie. Pour les propriétés fondamentales des fonctions holomorphes sur les espaces localement convexes, nous renvoyons le lecteur à S. Dineen [4], T. Franzoni et E. Vesentini [6].

1. – Définitions et rappels.

Soit E un espace vectoriel complexe localement convexe séparé, et soit D un domaine de E . Nous supposons toujours que D contient l'origine 0 de E . Si $D_1 \subset E$, et $D_2 \subset \mathbf{C}$ sont des domaines, nous noterons $H_g(D_1, D_2)$ l'ensemble des applications holomorphes de D_1 dans D_2 dont la restriction aux intersections de D_1 avec les sous-espaces vectoriels de dimension finie de E sont holomorphes. Les éléments de $H_g(D_1, D_2)$ s'appellent les fonctions holomorphes au sens de Gateaux [4]. On dit que les fonctions continues holomorphes au sens de Gateaux sont des fonctions holomorphes au sens de Fréchet, ou plus simplement des fonctions holomorphes, et on note leur ensemble $H(D_1, D_2)$. Dans le cas où $D_2 = \mathbf{C}$, nous écrirons $H_g(D_1)$ et $H(D_1)$, à la place de $H_g(D_1, \mathbf{C})$ et $H(D_1, \mathbf{C})$ respectivement. Soit Δ le disque-unité ouvert dans \mathbf{C} .

On déduit des inégalités de Cauchy (voir par exemple [4] et [3]) le résultat suivant.

LEMME 1.1. *Si D_2 est un domaine borné dans \mathbf{C} , $H_g(D_1, D_2) = H(D_1, D_2)$.*

Nous munirons l'espace vectoriel $H(D)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de dimension finie de E , et nous utiliserons la forme suivante du théorème de Montel.

LEMME 1.2. *L'ensemble*

$$A = \{f \in H(D, \Delta) \mid f(0) = 0\}$$

est un sous-ensemble compact de $H(D)$.

DÉMONSTRATION. D'après N. Bourbaki [1], il suffit de montrer que tout ultrafiltre \mathcal{U} sur A converge vers un élément de A . Soit donc \mathcal{U} un ultrafiltre sur A . Pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie F de E , la restriction à $D \cap F$ des fonctions holomorphes sur D définit un ultrafiltre $\mathcal{U}|_{D \cap F}$ sur $H(D \cap F)$. Le théorème de Montel et le principe du maximum du module montrent que $\mathcal{U}|_{D \cap F}$ converge vers une fonction holomorphe f_F définie sur $D \cap F$ à valeurs dans Δ .

Si G est un sous-espace vectoriel de dimension finie contenant F , il est clair que $f_{G|D \cap F} = f_F$. Les fonctions f_F se recollent donc et définissent une fonction f , holomorphe au sens de Gateaux sur D tout entier. D'après le lemme 1.1, f est holomorphe, et \mathcal{U} converge vers $f \in A$. Ainsi, A est compact.

Soit ϱ la métrique de Poincaré sur le disque-unité Δ . La pseudodistance de Carathéodory e_D sur D est définie de la manière suivante. Pour tout $z \in D$, pour tout $w \in D$,

$$e_D(z, w) = \sup \{ \varrho(f(z), f(w)); f \in H(D, \Delta) \}.$$

Comme Δ est homogène, on peut supposer que $f(z) = 0$ et que $f(w) \geq 0$. On déduit du lemme 1.2 le résultat suivant:

LEMME 1.3. *Pour tout $z \in D$, pour tout $w \in D$, il existe une application holomorphe $f \in H(D, \Delta)$ telle que $f(z) = 0$, $f(w) = \sigma > 0$, et $e_D(z, w) = \varrho(f(z), f(w)) = \varrho(0, \sigma)$.*

REMARQUE 1.4. D'après le lemme 1.1, la pseudodistance de Carathéodory est indépendante de la topologie de l'espace localement convexe E dans le sens suivant: si \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont deux topologies localement convexes séparées sur E telles qu'un sous-ensemble D de E soit ouvert pour ces deux topologies, soient $D_1 = (D, \mathcal{T}_1)$ et $D_2 = (D, \mathcal{T}_2)$. Alors $e_{D_1} = e_{D_2}$. Ce résultat n'est plus vrai si on considère des espaces vectoriels topologiques non séparés ou non localement convexes.

La pseudodistance de Kobayashi k_D est définie de manière duale. Pour tout $z \in D$, pour tout $w \in D$, on définit d'abord

$$\delta_D(z, w) = \inf \{ \varrho(\xi, \eta); \text{il existe } f \in H(\Delta, D) \text{ telle que } f(\xi) = z \text{ et } f(\eta) = w \}.$$

En général, δ_D n'est pas une pseudodistance, car elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire. Aussi, on définit la pseudodistance de Kobayashi k_D de la façon suivante:

$$k_D(z, w) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} \delta_D(z_j, z_{j+1}); z_1 = z, z_m = w; m \text{ quelconque} \right\}.$$

On définit de manière analogue, et on renvoie le lecteur à [6], [7] et [13] les métriques infinitésimales de Carathéodory γ_D et de Kobayashi χ_D .

Pour les domaines convexes de \mathbb{C}^n , L. Lempert montre dans [14] que

$$k_D = \delta_D.$$

Ce résultat lui sert en particulier pour montrer le résultat suivant:

THÉOREME 1.5 (L. Lempert [15], H. Royden et P. Wong [16]). *Soit D un domaine convexe de \mathbf{C}^n . Alors on a:*

$$c_D = k_D = \delta_D .$$

De même, pour les métriques infinitésimales,

$$\gamma_D = \chi_D .$$

La démonstration de $\delta_D = k_D$ peut se généraliser à la dimension infinie. Par contre, il ne semble pas possible de généraliser la démonstration de $c_D = k_D$ au cas d'un domaine convexe d'un espace localement convexe, et nous allons généraliser ce résultat par un autre moyen.

2. – Égalité des pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi en dimension infinie.

Soit D un domaine d'un espace vectoriel complexe localement convexe séparé E (Pour l'instant, il n'est pas nécessaire de supposer D convexe). Nous avons le résultat suivant:

THÉOREME 2.1. *Pour tout $z \in D$, pour tout $w \in D$,*

$$c_D(z, w) = \inf c_{D \cap F}(z, w) ,$$

où F parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels complexes de dimension finie de E contenant z et w .

DÉMONSTRATION. Comme l'injection

$$i: D \cap F \hookrightarrow D$$

est holomorphe, i est contractante pour la pseudodistance de Carathéodory. On a donc

$$c_D(z, w) \leq c_{D \cap F}(z, w) .$$

Considérons l'ensemble \mathfrak{E} des sous-espaces vectoriels complexes de dimension finie de E contenant z et w . Définissons un filtre \mathcal{F} sur \mathfrak{E} de la façon suivante: pour tout $G \in \mathfrak{E}$, considérons

$$\mathcal{A}_G = \{F \in \mathfrak{E} \mid F \supset G\} .$$

Il est clair que les \mathcal{A}_G , pour tous les $G \in \mathcal{E}$, forment une base de filtre \mathcal{F} sur \mathcal{E} .
 Considérons un ultrafiltre \mathcal{U} plus fin que \mathcal{F} .

Pour tout sous-espace vectoriel F de dimension finie de E , on peut choisir, d'après le lemme 1.3, une application holomorphe

$$\varphi_F: D \cap F \rightarrow \Delta$$

telle que

$$\varphi_F(z) = 0, \quad \varphi_F(w) = \sigma_F \geq 0,$$

et que

$$c_{D \cap F}(z, w) = \varrho(0, \sigma_F).$$

Soit G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Comme \mathcal{U} est un ultrafiltre [1], le lemme 1.2 montre que $(\varphi_{F|G \cap D})$ converge, selon \mathcal{U} , vers une application holomorphe

$$f_G: D \cap G \rightarrow \Delta.$$

De la même façon, σ_F converge, selon \mathcal{U} , vers $\sigma \in \Delta$.

Il est clair que si $G_2 \supset G_1$,

$$f_{G_2|G_1 \cap D} = f_{G_1}.$$

Ainsi, les f_G se recollent et définissent une application holomorphe (au sens de Gateaux).

$$f: D \rightarrow \Delta$$

telle que $f(z) = 0$ et $f(w) = \sigma$. En fait, f est holomorphe d'après le lemme 1.1 et on a

$$c_D(z, w) = \lim_{\mathcal{U}} c_{D \cap F}(z, w) = \inf_{F \in \mathcal{E}} c_{D \cap F}(z, w),$$

et le théorème est démontré.

De la même façon, on peut montrer le résultat suivant pour la métrique infinitésimale de Carathéodory.

THÉORÈME 2.2. *Pour tout $z \in D$, pour tout vecteur $v \in E$, on a*

$$\gamma_D(z, v) = \inf \gamma_{D \cap F}(z, v),$$

où F parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E contenant z et v .

REMARQUE 2.3. On déduit du théorème 2.1 que, pour tout $z \in D$, pour tout $w \in D$, il existe un sous-espace vectoriel complexe F de E , admettant une base algébrique dénombrable tel que

$$c_D(z, w) = c_{F \cap D}(z, w).$$

REMARQUE 2.4. Si on suppose que E est réunion croissante d'une suite E_n d'espaces vectoriels de dimension finie, il est inutile d'utiliser les ultra-filtres. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit une fonction

$$f_n \in H(D \cap E_n, \Delta)$$

telle que $f_n(z) = 0$, $f_n(w) = \sigma_n$ et que

$$c_{D \cap E_n}(z, w) = \varrho(0, \sigma_n).$$

La démonstration se fait alors par extraction de suites successives [pour chaque p , on définit une suite $(f_{n,p})$ extraite de la suite $(f_{n,p-1})$ telle que $f_{n,p}$ converge sur $D \cap E_p$]; on prend alors la suite diagonale, et on considère sa limite $f: D \rightarrow \Delta$.

Nous pouvons maintenant énoncer et montrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.5. *Soit D un domaine convexe d'un espace vectoriel complexe localement convexe séparé E . Alors, on a:*

$$c_D = k_D = \delta_D.$$

De même, pour les métriques infinitésimales,

$$\gamma_D = \chi_D.$$

DÉMONSTRATION. On a toujours

$$c_D \leq k_D \leq \delta_D.$$

Soient z et $w \in D$. En considérant, pour tout sous-espace vectoriel F de dimension finie contenant z et w , l'injection

$$i: D \cap F \hookrightarrow D,$$

on montre que

$$\delta_D(z, w) \leq \inf_F \delta_{D \cap F}(z, w),$$

où F parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E .

D'après le théorème 2.1, on a

$$c_D(z, w) = \inf_F c_{D \cap F}(z, w),$$

et d'après le théorème 5.1 (L. LEMPERT [15], H. ROYDEN et P. WONG [16]),

$$c_{D \cap F}(z, w) = \delta_{D \cap F}(z, w).$$

On en déduit

$$c_D(z, w) \geq \delta_D(z, w).$$

Ce qui prouve l'égalité annoncée.

L'égalité $\gamma_D = \chi_D$ se montre de façon analogue.

Dans [21], Vigné posait la question suivante: si D est le produit de deux domaines D_1 et D_2 , a-t-on, pour tout $(z_1, z_2) \in D_1 \times D_2$, pour tout $(w_1, w_2) \in D_1 \times D_2$

$$c_{D_1 \times D_2}((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = \max(c_{D_1}(z_1, w_1), c_{D_2}(z_2, w_2)).$$

Comme cette égalité est vraie pour la distance de Kobayashi et pour $\delta_{D_1 \times D_2}$ (voir par exemple [13]), on a le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2.6. *Soient D_1 et D_2 deux domaines convexes. Alors, pour tout $(z_1, z_2) \in D_1 \times D_2$, pour tout $(w_1, w_2) \in D_1 \times D_2$, on a*

$$c_{D_1 \times D_2}((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = \max(c_{D_1}(z_1, w_1), c_{D_2}(z_2, w_2)).$$

Il ne semble pas cependant que cette méthode permette de traiter un produit continu de domaines convexes au sens de [21].

La suite de cet article sera consacrée à des applications du théorème 2.5.

3. – Convexité des domaines bornés cerclés symétriques.

Dans [20], J.-P. Vigné a étudié les domaines bornés symétriques d'un espace de Banach complexe et a montré qu'ils étaient homogènes. Il a montré ensuite que tout domaine borné symétrique a une réalisation comme un domaine cerclé borné et que cette réalisation est unique à un isomorphisme linéaire près. W. Kaup et H. Upmeyer [10] ont montré que beaucoup de domaines bornés symétriques ont une réalisation comme un domaine de Siegel, et, dans [11], W. Kaup montre que tout domaine borné cerclé symétrique est convexe. Nous allons montrer que tout domaine borné cerclé symétrique qui admet une réalisation comme un domaine de Siegel est

convexe. Notre démonstration, qui est différente de celle de [10] est très simple et utilise essentiellement l'égalité des métriques infinitésimales de Carathéodory et de Kobayashi sur un domaine convexe. Commençons par la proposition suivante:

PROPOSITION 3.1 ⁽¹⁾. Soit D un domaine d'un espace de Banach complexe E , et supposons que l'adhérence \bar{D} de D est égale à

$$\{x \in E: |P_i(x)| \leq 1, \forall i \in I\},$$

pour une famille $(P_i)_{i \in I}$ de polynômes complexes homogènes continus sur E . Alors,

$$D = \{x \in E: \chi_D(0, x) < 1\}.$$

[Ainsi, la boule-unité pour la métrique infinitésimale de Kobayashi à l'origine $\chi_D(0, \cdot)$ est non convexe en général].

DÉMONSTRATION. Il est clair que D est contenu dans

$$A = \{x \in E: \chi_D(0, x) < 1\}.$$

Soit maintenant $x \in A$. D'après la définition de la métrique infinitésimale de Kobayashi, il existe une application holomorphe $\varphi: \Delta \rightarrow D$ telle que $\varphi(0) = 0$ et que $\varphi'(0) = \lambda x$, pour un nombre réel $\lambda > 1$.

On a donc, pour tout $i \in I$,

$$\|P_i \circ \varphi\|_{\Delta} \leq 1.$$

En calculant le développement en série de $P_i \circ \varphi(rz)$ on trouve que, pour tout $r < 1$,

$$P_i(r\varphi'(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_i(\varphi(r \exp[i\theta])) \exp[-n_i i\theta] d\theta,$$

où n_i est le degré du polynôme homogène P_i . On en déduit que $|P_i(\varphi'(0))| \leq 1$, ce qui montre que x appartient à D .

⁽¹⁾ Alors que la réduction de cet article était achevée nous avons appris qu'un résultat semblable à celui de la proposition 3.1 avait été démontré par T. BARTH, *The Kobayashi indicatrix at the center of a circular domain*, Proc. A.M.S., **88** (1983), pp. 527-530.

D'autre part, on sait que, si D est un domaine cerclé d'un espace de Banach complexe E , la boule-unité pour la métrique infinitésimale de Carathéodory à l'origine $\gamma_D(0, \cdot)$

$$B = \{x \in E: \gamma_D(0, x) < 1\}$$

est égale à l'enveloppe convexe de D . On déduit de ceci le théorème suivant:

THÉORÈME 3.2. *Soit D un domaine d'un espace de Banach complexe E , et supposons que*

$$\bar{D} = \{x \in E: |P_i(x)| \leq 1, \forall i \in I\}$$

pour une famille de polynômes homogènes complexes continues $(P_i)_{i \in I}$. Alors, si D admet une réalisation comme un domaine convexe, D est convexe.

DÉMONSTRATION. Puisque D admet une réalisation comme un domaine convexe, γ_D et χ_D coïncident. Compte-tenu de la proposition 3.1, et de la remarque précédente, D , qui est un domaine cerclé est égal à l'enveloppe convexe de D et est donc convexe.

On déduit du théorème 3.2 le corollaire suivant:

COROLLAIRE 3.3. *Soit D un domaine borné cerclé symétrique d'un espace de Banach complexe E , et supposons que D admette une réalisation comme un domaine de Siegel. Alors D est convexe.*

DÉMONSTRATION. D'après W. Kaup et H. Upmeyer [10], si D admet une réalisation comme un domaine de Siegel S , S est convexe. [C'est une conséquence facile du fait que S est égal à son enveloppe d'holomorphie (voir [20])]. D'autre part, en utilisant des résultats de S. Dineen [5] sur les enveloppes d'holomorphie, J.-P. Vigué [22] a montré que

$$\bar{D} = \{x \in E: |P_i(x)| \leq 1, \forall i \in I\}$$

pour une famille de polynômes homogènes $(P_i)_{i \in I}$. D'après le théorème 4.2, D est convexe.

On sait que tous les domaines bornés symétriques de \mathbb{C}^n admettent une réalisation comme un domaine de Siegel. En dimension infinie, des conditions très générales pour qu'il en soit ainsi sont données par W. Kaup et H. Upmeyer [10].

4. – Existence de géodésiques complexes.

Rappelons d'abord la définition des géodésiques complexes au sens de E. Vesentini [17, 18 et 19].

DÉFINITION 4.1. Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E . On dit qu'une application holomorphe $\varphi: \Delta \rightarrow D$ est un géodésique complexe si φ est une isométrie pour la distance de Carathéodory, c'est-à-dire, si, pour tout $\zeta_1 \in \Delta$, pour tout $\zeta_2 \in \Delta$, on a :

$$c_D(\varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)) = c_\Delta(\zeta_1, \zeta_2) = \varrho(\zeta_1, \zeta_2).$$

THÉORÈME 4.2. Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E . Soit $\varphi: \Delta \rightarrow D$ une application holomorphe. Pour que φ soit un géodésique complexe, il faut et il suffit que φ vérifie une des deux conditions suivantes :

(i) il existe deux points distincts ζ_1 et ζ_2 de Δ tels que

$$c_D(\varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)) = c_\Delta(\zeta_1, \zeta_2) = \varrho(\zeta_1, \zeta_2),$$

(ii) il existe $\zeta \in \Delta$ et un vecteur v non nul $\in \mathbf{C}$ tels que

$$\gamma_D(\varphi(\zeta), \varphi'(\zeta) \cdot v) = \gamma_\Delta(\zeta, v).$$

Il est facile de voir que, sur l'image $\varphi(\Delta)$ d'une géodésique complexe φ , les distances de Carathéodory et de Kobayashi coïncident. Réciproquement, nous avons le théorème suivant qui généralise certains résultats de E. Vesentini sur l'existence des géodésiques complexes.

THÉORÈME 4.3. Soit D un domaine borné convexe d'un espace de Banach complexe E , et soit \mathfrak{T} une topologie localement convexe séparée sur E , moins fine que la topologie de la norme. Supposons que l'adhérence \bar{D} de D , pour la topologie de la norme, soit \mathfrak{T} -compacte.

(i) Etant donnés deux points z et w de D , il existe au moins une géodésique complexe $\varphi: \Delta \rightarrow D$ telle que z et w appartiennent à $\varphi(\Delta)$;

(ii) étant donnés $z \in D$ et un vecteur $v \in E$, il existe au moins une géodésique complexe $\varphi: \Delta \rightarrow D$ telle que $\varphi(0) = z$ et que $\varphi'(0)$ soit colinéaire à v .

DÉMONSTRATION. Montrons (i). Soit $f_n \in H(\Delta, D)$ une suite de fonctions holomorphes telles que $f_n(0) = z$, $f_n(\sigma_n) = w$, $\sigma_n > 0$, $\lim \sigma_n = \sigma$ et $\varrho(0, \sigma) = k_D(z, w)$.

Soit

$$f_n(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \zeta^m, \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Comme D est borné, il existe un nombre réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\|a_{n,m}\| \leq M$. Comme D est borné, la boule $B(0, M)$ est \mathfrak{G} -relativement compacte, et sa \mathfrak{G} -adhérence $\overline{B(0, M)}^{\mathfrak{G}}$ est contenue dans $B(0, M')$.

Il est clair que $a_{n,0} = z, \forall n \in \mathbb{N}$. Soit \mathcal{U} un ultrafiltre sur \mathbb{N} , sans point adhérent. Par \mathfrak{G} -compacité, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(a_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ converge selon \mathcal{U} vers a_m . Il est clair que $a_m \in B(0, M')$.

Par suite, la série

$$f(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^m$$

définit une fonction holomorphe de Δ dans E .

On montre alors (voir par exemple la méthode de [9, p. 104-106]) que, pour tout $\zeta \in \Delta$, $(f_n(\zeta))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, selon \mathcal{U} , vers $f(\zeta)$. Ceci montre que $f(0) = z, f(\sigma) = w$, et $f(\Delta) \subset \overline{D}$. Comme D est convexe, on en déduit que $f(\Delta) \subset D$, et, d'après le théorème 4.2, f est bien une géodésique complexe telle que $f(0) = z$ et $f(\sigma) = w$.

Les hypothèses du théorème 4.3 sont vérifiées en particulier dans les deux cas suivants:

1/ E est un espace de Banach réflexif et D est un domaine borné convexe de E .

En effet, dans ce cas, le théorème de Hahn-Banach montre que les adhérences \overline{D}^n de D pour la topologie de la norme et \overline{D}^r pour la topologie faible sont égales, et on sait que \overline{D}^r est faiblement compact.

2/ E est le dual topologique d'un espace de Banach F , et D est la boule-unité ouverte de E .

Dans ce cas, l'adhérence \overline{D} de D est compacte pour la topologie faible définie par F .

Remarquons que le cas 2/ s'applique par exemple à la boule-unité ouverte B de $l_1(\mathbb{N})$.

Nous conjecturons que les géodésiques complexes existent toujours entre deux points quelconques de la boule-unité ouverte d'un espace de Banach complexe. Si on regarde les espaces de suite classiques, nous avons montré ce résultat dans le cas de $l_p, 1 \leq p < \infty$, et c'est aussi vrai pour c_0 puisque la boule-unité de cet espace est un domaine borné symétrique.

Ce résultat a des conséquences aussi en dimension finie. Ainsi, du théorème 4.3 et des résultats de [24] on déduit le théorème suivant:

THÉORÈME 4.4. *Soit D un domaine borné convexe de \mathbb{C}^n , et soit $f: D \rightarrow D$ une application holomorphe. Alors, l'ensemble des points fixes de f est un sous-ensemble analytique connexe de D .*

5. – Sur la caractérisation des automorphismes biholomorphes des domaines bornés.

Si D est un domaine borné d'un espace de Banach complexe E , il est intéressant d'essayer de caractériser les automorphismes biholomorphes de D comme les applications holomorphes $f: D \rightarrow D$ isométriques pour une distance invariante. Une telle caractérisation a été donnée par L. Harris et J.-P. Vigué [8] avec des hypothèses très fortes, alors que, en dimension finie, on déduit de H. Cartan [2] le théorème suivant:

THÉORÈME 5.1. *Soit D un domaine borné de \mathbb{C}^n , et soit a un point de D . Soit $f: D \rightarrow D$ une application holomorphe telle que $f(a) = a$ et que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Carathéodory $\gamma_D(a, \cdot)$. Alors f est un automorphisme biholomorphe de D .*

Malheureusement, J.-P. Vigué [23] a montré que, même pour un domaine cerclé borné D d'un espace de Banach complexe, la caractérisation de H. Cartan n'était pas valable. Nous allons voir maintenant ce qu'il est possible de dire dans le cas où D est un domaine borné convexe d'un espace de Banach complexe E .

Plus précisément, soit E un espace de Banach complexe réflexif, et soient D_1 et D_2 deux domaines bornés de E . Supposons que D_1 soit convexe, et soit a un point de D_1 . Enfin, soit $f: D_1 \rightarrow D_2$ une application holomorphe, et supposons que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Carathéodory, c'est-à-dire que, pour tout vecteur $v \in E$, on a

$$\gamma_{D_2}(f(a), f'(a) \cdot v) = \gamma_{D_1}(a, v).$$

Nous avons la proposition suivante:

PROPOSITION 5.2. *Pour tout $x \in D_1$,*

$$c_{D_2}(f(a), f(x)) = c_{D_1}(a, x).$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in D_1$. D'après le théorème 4.3, il existe une géodésique complexe φ telle que $\varphi(0) = a$ et que $x \in \varphi(\Delta)$. Comme $f'(a)$ est une isométrie pour la métrique infinitésimale de Carathéodory, on a, pour tout $v \in \mathbb{C}$,

$$\gamma_{D_2}(f \circ \varphi(0), (f \circ \varphi)'(0)v) = \gamma_{D_1}(\varphi(0), \varphi'(0) \cdot v) = \gamma_{D_1}(0, v).$$

D'après le théorème 4.2, $f \circ \varphi$ est une géodésique complexe. On a donc

$$c_{D_2}(f \circ \varphi(0), f \circ \varphi(\zeta)) = c_{D_1}(0, \zeta),$$

de même,

$$c_{D_1}(\varphi(0), \varphi(\zeta)) = c_D(0, \zeta),$$

ce qui prouve le résultat.

Rappelons qu'un ensemble $A \subset D$ est dit *compétement intérieur* à D (et on le note $A \subset\subset D$) si la distance de A à la frontière de D est strictement positive.

De la proposition 5.2 et de L. Harris [7], proposition 23, p. 381, on déduit le corollaire suivant:

COROLLAIRE 5.3. *Pour tout $A \subset\subset D_2$, $f^{-1}(A) \subset\subset D_1$.*

Supposons de plus que D_2 est convexe, et que les géodésiques complexes passant par $b = f(a)$ sont uniques. Plus précisément, nous supposons que étant donné un point x de D_2 , il existe, à un changement de paramètre holomorphe près, une seule géodésique complexe φ telle que b et x appartiennent à $\varphi(\Delta)$. Ceci est par exemple le cas quand D_2 est la boule-unité ouverte d'un espace de Banach complexe tel que tout point de la frontière de D_2 soit un point complexe-extrémal de \bar{D}_2 , et $b = 0$ (voir E. Vesentini [19]).

Sous ces hypothèses, nous allons montrer que f est une application bijective D_1 sur D_2 . Montrons d'abord que f est surjective. Soit $x \in D_2$. Soit $\psi: \Delta \rightarrow D_2$ une géodésique complexe telle que $\psi(0) = b$ et que x appartienne à $\psi(\Delta)$. D'après le théorème d'inversion locale $\psi(\zeta) \in f(D_1)$, si ζ est suffisamment proche de 0 . Choisissons un tel $\zeta_0 \neq 0$; il existe donc une géodésique complexe $\varphi: \Delta \rightarrow D_1$ telle que $\varphi(0) = a$, $\varphi(\zeta_0) = c$, et $f(c) = \psi(\zeta_0)$. D'après l'hypothèse d'unicité des géodésiques complexes, on a $f \circ \varphi = \psi$. Ainsi, $x \in f(D_1)$.

Montrons maintenant que f est injectif. Soient c et d deux points de D_1 , et supposons que $f(c) = f(d) = e$. Soit φ_1 (resp. φ_2) une géodésique complexe passant par a et c (resp. d). Comme

$$c_{D_1}(a, c) = c_{D_1}(a, d),$$

on peut changer la paramétrisation de φ_1 et φ_2 et supposer que

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= a, & \varphi_1(\zeta) &= c \\ \varphi_2(0) &= a, & \varphi_2(\zeta) &= d. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_1(0) &= b, & f \circ \varphi_1(\zeta) &= e, \\ f \circ \varphi_2(0) &= b, & f \circ \varphi_2(\zeta) &= e. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse d'unicité des géodésiques complexes, on a: $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2$. Mais, comme f est un isomorphisme d'un voisinage de a sur un voisinage de b , ceci entraîne $\varphi_1 = \varphi_2$ et $b = c$. Nous avons donc montré le théorème suivant:

THÉORÈME 5.4. *Soient D_1 et D_2 deux domaines bornés convexes d'un espace de Banach réflexif E . Soit a un point de D_1 , soit b un point de D_2 , et soit $f: D_1 \rightarrow D_2$ une application holomorphe telle que $f(a) = b$. Supposons que les géodésiques complexes passant par b vérifie l'hypothèse d'unicité et que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour les métriques infinitésimales de Carathéodory. Alors f est une application bijective de D_1 sur D_2 .*

On peut se demander si f est un isomorphisme biholomorphe. Pour l'instant, nous ne savons pas la réponse. Il serait également intéressant de savoir si l'hypothèse sur l'unicité des géodésiques complexes est nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chapitre I, Hermann, Paris, 1965.
- [2] H. CARTAN, *Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieures d'une domaine borné*, Math. Z., **35** (1932), pp. 760-773.
- [3] J.-F. COLOMBEAU - D. LAZET, *Sur les théorèmes de Vitali et de Montel en dimension infinie*, C.R. Acad. Sci., Paris, A. **274** (1972), pp. 185-187.
- [4] S. DINEEN, *Complex analysis on locally convex spaces*, North-Holland Math. Studies 57, Amsterdam, 1981.
- [5] S. DINEEN, *The Cartan-Thullen theorem for Banach spaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **24** (1970), pp. 667-676.
- [6] T. FRANZONI - E. VESENTINI, *Holomorphic maps and invariant distances*, North-Holland Math. Studies 40, Amsterdam, 1980.
- [7] L. A. HARRIS, *Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces*, in *Advances in Holomorphy*, North-Holland Math. Studies 34, Amsterdam, 1979, pp. 345-406.
- [8] L. A. HARRIS - J.-P. VIGUÉ, *A metric condition for equivalence of domains*, Atti Accad. Naz. Lincei, **67** (1979), pp. 402-403.
- [9] E. HILLE - R. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **36**, A.M.S., Providence, 1957.
- [10] W. KAUP - H. UPMEIER, *Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces*, Math. Z., **147** (1977), pp. 179-200.
- [11] W. KAUP, *A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces*, Math. Z., **183** (1983), pp. 503-529.
- [12] S. KOBAYASHI, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Marcel Dekker, New York, 1971.
- [13] S. KOBAYASHI, *Intrinsic distances, measures and geometric function theory*, Bull. Amer. Math. Soc., **82** (1976), pp. 357-416.

- [14] L. LEMPert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. France, **109** (1981), pp. 427-474.
- [15] L. LEMPert, *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains*, Anal. math., **8** (1982), pp. 257-261.
- [16] H. ROYDEN - P. WONG, *Carathéodory and Kobayashi metric on convex domains*, à paraître.
- [17] E. VESENTINI, *Complex geodesics*, Compositio math., **44** (1981), pp. 375-394.
- [18] E. VESENTINI, *Complex geodesics and holomorphic maps*, Sympos. math., **26** (1982), pp. 211-230.
- [19] E. VESENTINI, *Invariant distances and invariant differential metrics in locally convex spaces*, Spectral theory, Banach center publications, **8** (1982), pp. 493-512.
- [20] J.-P. VIGUÉ, *Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup, (4), **9** (1976), pp. 203-282.
- [21] J.-P. VIGUÉ, *Automorphismes analytiques des produits continus de domaines bornés*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup (4), **11** (1978), pp. 229-246.
- [22] J.-P. VIGUÉ, *Sur la convexité des domaines bornés cerclés homogènes*, Séminaire Lelong-Skoda, Lecture Notes 822, 1980, Springer, Berlin, pp. 317-331.
- [23] J.-P. VIGUÉ, *Sur les applications holomorphes isométriques pour la distance de Carathéodory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4), **9** (1982), pp. 255-261.
- [24] J.-P. VIGUÉ, *Géodésiques complexes et points fixes d'applications holomorphes*, Adv. in Math., **52** (1984), pp. 241-247.

Department of Mathematics
 University College Dublin
 Belfield
 Dublin 4
 Ireland

School of Mathematics
 Trinity College
 Dublin 2
 Ireland

Université Paris VI
 Analyse Complexe
 et Géométrie
 Laboratoire Associé au C.N.R.S.
 (L.A. 213)
 4, Place Jussieu
 75230 Paris-Cedex 05
 France